

Statistik

Inhalt

Artikel

| | |
|--------------------|---|
| Spezifität | 1 |
| Richtig negativ | 1 |
| Sensitivität | 2 |
| Falsch negativ | 3 |
| Statistischer Test | 4 |

Referenzen

| | |
|--|----|
| Quellen und Bearbeiter der Artikel | 12 |
| Quellen, Lizenzen und Autoren der Bilder | 13 |

Artikellizenzen

| | |
|--------|----|
| Lizenz | 14 |
|--------|----|

Spezifität

In der Statistik bezeichnet die **Spezifität** (auch **Richtignegativ-Rate** oder **Kennzeichnende Eigenschaft**; englisch: *specificity* oder *true negative rate*) eines statistischen Tests oder einer anderen Klassifizierung die Wahrscheinlichkeit, einen tatsächlich negativen Sachverhalt auch durch ein negatives Testergebnis zu erkennen. Sie gibt also den Anteil der richtig als negativ (richtig negativ) erkannten Sachverhalte an der Gesamtheit der in Wirklichkeit negativen Sachverhalte an.

Die Spezifität entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{negativ erkannt} | \text{tatsächlich negativ}) = \frac{\text{Anzahl der richtig negativen}}{\text{Anzahl der richtig negativen} + \text{Anzahl der falsch positive}}$$

Mit der Falschpositiv-Rate addiert sich die Richtignegativ-Rate zu 100% der tatsächlich negativen Sachverhalte.

Falls ein negativer Sachverhalt fälschlicherweise als positiv (falsch positiv) klassifiziert wird, spricht man von einem Fehler 1. Art.

Beispielsweise gibt die Spezifität bei einer medizinischen Untersuchungsmethode zur Erkennung einer Krankheit den Anteil an Gesunden an, bei denen auch festgestellt wurde, dass keine Krankheit vorliegt.

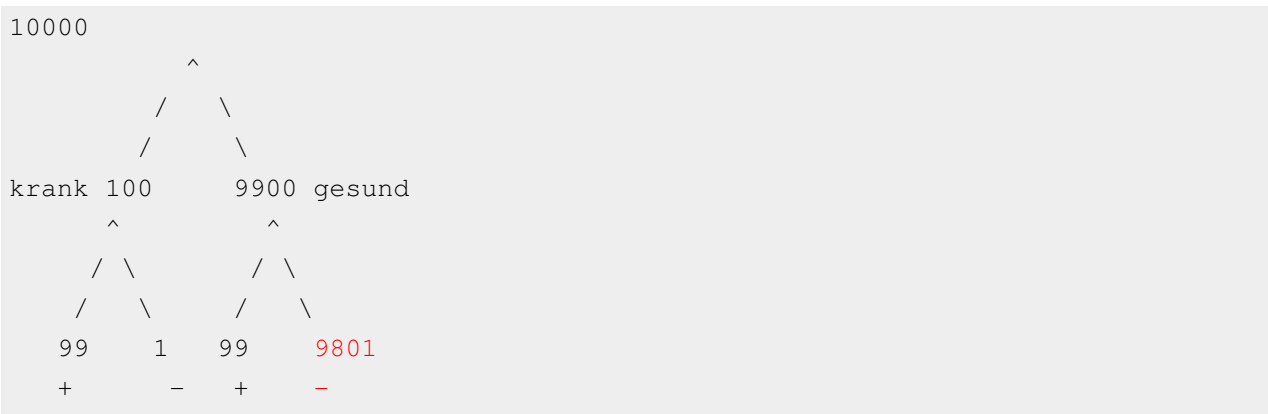
Weitere Kennwerte zur Beurteilung eines Klassifikators sind die Sensitivität, der positive prädiktive Wert (auch *Relevanz*), der negative prädiktive Wert (auch *Segreganz*), die Korrektklassifikationsrate sowie die Falschklassifikationsrate. Siehe auch Vierfeldertafel.

Richtig negativ

Das Ergebnis eines statistischen Tests ist **richtig negativ**, wenn korrekt angezeigt wird, dass das gesuchte Ergebnis nicht gefunden ist. Da jeder Algorithmus, der etwas nachweisen soll, eine Tendenz hat Falschalarme zu produzieren wird dies grundsätzlich nicht in allen Fällen zutreffen. Es treten Fehler 1. und 2. Art auf.

Beispiel

Eine Krankheit hat den Grundanteil 100 von 10000, das heißt im Schnitt sind 100 von 10000 Personen erkrankt. Ein medizinischer Test soll das Vorhandensein der Krankheit feststellen (positives Testergebnis), kommt aber in einem Prozent der Fälle zum falschen Schluss. Diese Situation kann mittels des folgenden Entscheidungsbaums dargestellt werden:



Der richtig negative Test ist hier rot hervorgehoben. Es bedeutet, dass durch die Fehlerrate von 1% 9801 der 9900 gesunden Testpersonen tatsächlich als gesund erkannt werden.

Siehe auch

Beurteilung eines Klassifikators

Sensitivität

In der Statistik bezeichnet die **Sensitivität** (auch **Richtigpositiv-Rate**, **Empfindlichkeit** oder **Trefferquote**; englisch *sensitivity* oder *true positive rate*) eines statistischen Tests oder einer anderen Klassifizierung die Wahrscheinlichkeit, einen tatsächlich positiven Sachverhalt auch durch ein positives Testergebnis zu erkennen. Sie gibt also den Anteil der richtig als positiv (richtig positiv) erkannten Sachverhalte an der Gesamtheit der in Wirklichkeit positiven Sachverhalte an.

Die Sensitivität entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit.

$$P(\text{positiv erkannt} | \text{tatsächlich positiv}) = \frac{\text{Anzahl der richtig positiven}}{\text{Anzahl der richtig positiven} + \text{Anzahl der falsch negativen}}$$

Mit der Falschnegativ-Rate addiert sich die Richtigpositiv-Rate zu 100 % der tatsächlich positiven Sachverhalte.

Falls ein positiver Sachverhalt fälschlicherweise als negativ (falsch negativ) klassifiziert wird, spricht man von einem Fehler 2. Art.

Beispielsweise gibt die Sensitivität bei einer medizinischen Untersuchungsmethode zur Erkennung einer Krankheit den Anteil an Kranken an, bei denen die Krankheit auch erkannt wurde.

Weitere Kennwerte zur Beurteilung eines Klassifikators sind die Spezifität, der positive prädiktive Wert (*Relevanz*), der negative prädiktive Wert (*Segreganz*), die Korrektklassifikationsrate sowie die Falschklassifikationsrate; siehe auch Vierfeldertafel.

Siehe auch: Zinssensitivität, Bayes-Theorem, Recall und Precision

Falsch negativ

Ein Testergebnis ist **falsch negativ**, wenn es fälschlicherweise anzeigt, dass das Testkriterium nicht erfüllt (also negativ) sei. Das Kriterium ist also tatsächlich erfüllt, wird aber vom Test nicht erkannt. Für ein falsch negatives Ergebnis wird häufig die englische Bezeichnung „false negative“ verwendet.

Bei einem statistischen Test mit Nullhypothese führt ein falsch negatives Ergebnis zu einem Fehler 2. Art.

Beispiele

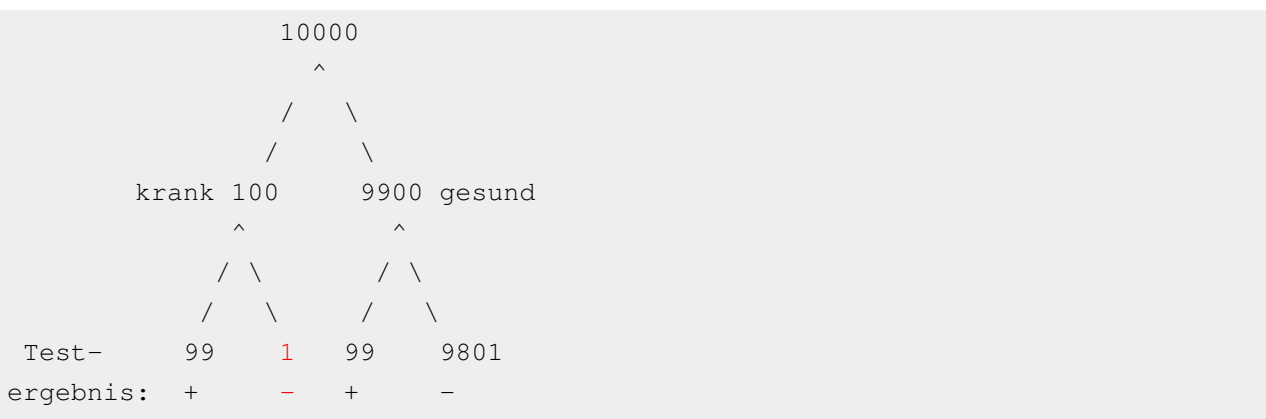
Beispiel 1

Das Ergebnis eines Schwangerschaftstests ist *falsch negativ*, wenn er keine Schwangerschaft anzeigt, obwohl eine Schwangerschaft vorliegt.

Beispiel 2

Das Beispiel dient vor allem dazu, die Aussagekraft von negativen und positiven Testergebnissen zu vergleichen. Im Folgenden werden die Auswirkungen von falsch negativen Ergebnissen beschrieben. Die entsprechende Beschreibung von falsch positiven finden sich dort.

Eine Krankheit hat den Grundanteil 100 von 10000, das heißt im Schnitt sind 100 von 10000 Personen erkrankt. Ein medizinischer Test soll das Vorhandensein der Krankheit feststellen (positives Testergebnis), kommt aber in einem Prozent der Fälle zum falschen Schluss. Diese Situation kann mittels des folgenden Entscheidungsbaums dargestellt werden:



Das falsch negative Testergebnis ist hier rot hervorgehoben. Es bedeutet, dass durch die Fehlerrate von 1% einer von 100 Tests ein falsch negatives Ergebnis ergibt: Von den 100 kranken Testpersonen erhält eine die falsche Diagnose, gesund zu sein.

Durch den geringen Krankenanteil werden durch den Test 9.802 von 10.000 als gesund diagnostiziert. Davon sind fast alle (nämlich 9.801) auch tatsächlich gesund. Obwohl der Test eine Sensitivität und eine Spezifität von jeweils 99 % hat, hat die Diagnose *gesund* eine Sicherheit von $9.801/9.802 = 99,989798 \%$ (die Segreganz des Tests): Eine Person mit der Diagnose „gesund“ ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,989798 % tatsächlich gesund.

Siehe auch

- Falsch positiv
- Beurteilung eines Klassifikators

Literatur

- Gerd Gigerenzer: *Das Einmaleins der Skepsis*. Berlin: Berliner Taschenbuch Verlag, 2004 ISBN 3-8333-0041-8

Weblinks

- Leseprobe aus Gerd Gigerenzer: *Das Einmaleins der Skepsis* ^[1]

Referenzen

[1] <http://gaebler.info/lesen/gigerenzer.htm>

Statistischer Test

Ein **statistischer Test** dient in der mathematischen Statistik dazu, anhand vorliegender Beobachtungen eine begründete Entscheidung über die Gültigkeit oder Ungültigkeit einer Hypothese zu treffen. Formal ist ein Test also eine mathematische Funktion. Da die vorhandenen Daten Realisationen von Zufallsvariablen sind, lässt sich in den meisten Fällen nicht mit Sicherheit sagen, ob eine Hypothese stimmt oder nicht. Man versucht daher, die Wahrscheinlichkeiten für Fehlentscheidungen zu kontrollieren, was einem Test zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau entspricht. Wir sprechen daher auch von einem *Hypothesentest* oder auch *Signifikanztest*.

Interpretation eines statistischen Tests

Ein statistisches Testverfahren lässt sich im Prinzip mit einem Gerichtsverfahren vergleichen. Es wird immer von der Unschuld eines Verdächtigen ausgegangen, und so lange große Zweifel an den Belegen für ein tatsächliches Vergehen bestehen, wird ein Angeklagter freigesprochen. Nur wenn die Indizien für die Schuld eines Angeklagten deutlich überwiegen, kommt es zu einer Verurteilung.

Es gibt demnach zu Beginn des Verfahrens die beiden Hypothesen H_0 „der Verdächtige ist unschuldig“ und H_1 „der Verdächtige ist schuldig“. Erstere nennt man *Nullhypothese*, von ihr wird vorläufig ausgegangen. Die zweite nennt man *Alternativhypothese*. Sie ist diejenige, die zu „beweisen“ versucht wird.

Um einen Unschuldigen nicht zu schnell zu verurteilen, wird die Hypothese der Unschuld erst dann verworfen, wenn ein Irrtum sehr unwahrscheinlich ist. Man spricht auch davon, die Wahrscheinlichkeit für einen *Fehler erster Art* (also das Verurteilen eines Unschuldigen) zu kontrollieren. Naturgemäß wird durch dieses unsymmetrische Vorgehen die Wahrscheinlichkeit für einen *Fehler zweiter Art* (also das Freisprechen eines Schuldigen) „groß“. Aufgrund der stochastischen Struktur des Testproblems lassen sich wie in einem Gerichtsverfahren Fehlentscheidungen grundsätzlich nicht vermeiden. Man versucht in der Statistik allerdings optimale Tests zu konstruieren, die die Fehlerwahrscheinlichkeiten minimieren.

Ein einführendes Beispiel

Es soll versucht werden, einen Test auf Hellsehfähigkeiten zu entwickeln.

Einer Testperson wird 25-mal die Rückseite einer rein zufällig gewählten Spielkarte gezeigt und sie wird danach gefragt, zu welcher der vier Farben (Kreuz, Pik, Herz, Karo) die Karte gehört. Die Anzahl der Treffer nennen wir X .

Da die Hellsehfähigkeiten der Person getestet werden sollen, gehen wir vorläufig von der Nullhypothese aus, die Testperson sei nicht hellsehend. Die Alternativhypothese lautet entsprechend: Die Testperson ist mehr oder weniger hellseherisch begabt.

Was bedeutet das für unseren Test? Wenn die Nullhypothese richtig ist, wird die Testperson nur versuchen können, die jeweilige Farbe zu erraten. Für jede Karte gibt es natürlich eine Wahrscheinlichkeit von $1/4$, richtig zu antworten. Ist die Alternativhypothese richtig, hat die Person für jede Karte eine größere Wahrscheinlichkeit als $1/4$. Wir nennen die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Vorhersage p .

Die Hypothesen lauten dann: ^[1]

$$H_0 : p = \frac{1}{4}$$

und

$$H_1 : p > \frac{1}{4}.$$

Wenn die Testperson alle 25 Karten richtig benennt, werden wir sie als Hellseher betrachten und natürlich die Nullhypothese ablehnen. Und mit 24 oder 23 Treffern auch. Andererseits gibt es bei nur 5 oder 6 Treffern keinen Grund dazu. Aber was wäre mit 12 Treffern? Was ist mit 17 Treffern? Wo liegt die kritische Anzahl an Treffern c , von der an wir nicht mehr glauben können, es seien reine Zufallstreffer?

Wie bestimmen wir also den kritischen Wert c ? Man sieht leicht ein, dass man mit $c = 25$ (also dass wir nur hellseherische Fähigkeiten erkennen wollen, wenn alle Karten richtig erkannt worden sind) deutlich kritischer ist als mit $c = 10$. Im ersten Fall wird man kaum eine Person als Hellseher ansehen, im zweiten Fall einige mehr.

In der Praxis kommt es also darauf an, wie kritisch man genau sein will, also wie oft man eine Fehlentscheidung erster Art zulässt. Mit $c = 25$ ist die Wahrscheinlichkeit einer solchen Fehlentscheidung:

$$P(H_0 \text{ ablehnen} | H_0 \text{ ist richtig}) = P(X \geq 25 | p = \frac{1}{4}) = \left(\frac{1}{4}\right)^{25} \approx 10^{-15},$$

also sehr klein. Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Testperson rein zufällig 25 mal richtig geraten hat.

Weniger kritisch, mit $c = 10$, erhalten wir mit der Binomialverteilung, $B(\cdot | p, 25)$

$$P(H_0 \text{ ablehnen} | H_0 \text{ ist richtig}) = P(X \geq 10 | p = \frac{1}{4}) = \sum_{i=10}^{25} B(i | \frac{1}{4}, 25) \approx 0,07,$$

eine wesentlich größere Wahrscheinlichkeit.

Vor dem Test wird eine Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art festgesetzt. Typisch sind Werte zwischen 1 % und 5 %. Abhängig davon lässt sich (hier im Falle eines Signifikanzniveaus von 1 %) dann c so bestimmen, dass

$$P(H_0 \text{ ablehnen} | H_0 \text{ ist richtig}) = P(X \geq c | p = \frac{1}{4}) \leq 0,01,$$

gilt. Unter allen Zahlen c , die diese Eigenschaft erfüllen, wird man zuletzt c als die kleinste Zahl wählen, die diese Eigenschaft erfüllt, um die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art klein zu halten. In diesem konkreten Beispiel folgt: $c = 12$. Ein Test dieser Art heißt Binomialtest, da die Anzahl der Treffer unter der Nullhypothese binomial verteilt ist.

Mögliche Fehlentscheidungen

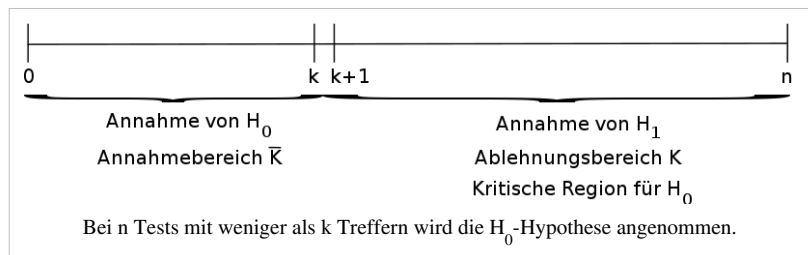
Auch wenn es wünschenswert ist, dass der Test aufgrund der vorliegenden Daten „richtig“ entscheidet, besteht die Möglichkeit von Fehlentscheidungen. Im mathematischen Modell bedeutet dies, dass man bei richtiger Nullhypothese und Entscheidung für die Alternative einen Fehler 1. Art (α -Fehler) begangen hat. Falls man die Nullhypothese bestätigt sieht, obwohl sie nicht stimmt, begeht man einen Fehler 2. Art (β -Fehler).

In der statistischen Praxis macht man aus diesem vordergründig symmetrischen Problem ein unsymmetrisches: Man legt also ein Signifikanzniveau α fest, das eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art liefert. Tests mit dieser Eigenschaft heißen *Test zum Niveau α* . Im Anschluss daran versucht man, einen optimalen Test zum vorgegebenen Niveau dadurch zu erhalten, dass man unter allen Tests zum Niveau α einen sucht, der die geringste Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art aufweist.

Die formale Vorgehensweise

Generell geht man bei der Anwendung eines Tests in folgenden Schritten vor:

1. Formulierung einer Nullhypothese H_0 und ihrer Alternativhypothese H_1
2. Wahl des geeigneten Tests (Testgröße oder Teststatistik T)



3. Bestimmung des kritischen Bereiches K zum Signifikanzniveau α , das vor Realisation der Stichprobe feststehen muss. Der kritische Bereich wird aus den unter der Nullhypothese nur mit geringer Wahrscheinlichkeit auftretenden Werten der Teststatistik gebildet.
4. Berechnung des Werts der Beobachtung t_{obs} der Testgröße T aus der Stichprobe (je nach Testverfahren etwa den t-Wert oder U oder H oder χ^2 ...).
5. Treffen der Testentscheidung:
 - Liegt t_{obs} nicht in K, so wird H_0 beibehalten.
 - Liegt t_{obs} in K, so lehnt man H_0 zugunsten von H_1 ab.

Formale Definition eines statistischen Testes

Parametrischer statistischer Test

Sei X eine Zufallsvariable, die von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta)$ in einen Messraum $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ abbildet. Sei zusätzlich $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ die parametrische Verteilungsannahme, also eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, wobei $P_\theta = \mathbb{P}_\theta \circ X^{-1}$. Θ sei hierbei der Parameterraum, der in der Praxis meist eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist. Eine Zerlegung von Θ in zwei disjunkte Mengen Θ_0 und Θ_1 definiert das Testproblem:

- $H_0 : \theta \in \Theta_0$
- $H_1 : \theta \in \Theta_1$

wobei H_0 die *Nullhypothese* und H_1 die *Alternativhypothese* bezeichnet.

Eine messbare Funktion $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}$ heißt *Test*, und die Menge $K_\varphi = \{x \in \mathcal{X} | \varphi(x) = 1\}$ heißt *kritischer Bereich* des Tests.

Sei nun $\alpha \in (0, 1)$ ein *Signifikanz-Niveau*. Dann heißt ein Test φ ein *Test zum Niveau α für das Testproblem H_0 gegen H_1* (auch *Niveau- α -Test*), wenn

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(X \in K_\varphi) = \alpha$$

Im Falle der Existenz von K_φ sucht man in der Regel den kritischen Bereich, der für alle $\tilde{K} \in \mathcal{F}$, die für alle $\theta \in \Theta_0$ die Bedingung $\mathbb{P}_\theta(X \in \tilde{K}) \leq \alpha$ erfüllen, und für alle $\theta \in \Theta_1$ folgende Optimalitätsbedingung erfüllt:

$$\mathbb{P}_\theta(X \in \tilde{K}) \leq \mathbb{P}_\theta(X \in K)$$

Der Testfunktion φ legt man nun folgende Interpretation zugrunde:

- $\varphi(x) = 1 \Rightarrow$ Nullhypothese H_0 ablehnen bzw. verwerfen.
- $\varphi(x) = 0 \Rightarrow$ Nullhypothese H_0 beibehalten.

Neyman-Pearson-Tests

Optimale Tests existieren in parametrischen Modellen nur für bestimmte Hypothesen. Im einfachsten Fall zweier Punkthypothesen $H_0 : \theta = \theta_0$ und $H_1 : \theta = \theta_1$ wählt man als Test einen Likelihood-Quotienten-Test, der die Nullhypothese ablehnt, falls

$$\Lambda(x) = \frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)} \leq k \text{ mit } P_{H_0}(\Lambda(X) \leq k) = \alpha$$

gilt. Dieser Test ist nach dem Neyman-Pearson-Lemma bester Test zum Niveau α .

Neyman-Pearson-Tests lassen sich auf einseitige Hypothesen der Form $H_0 : \theta \leq \theta_0$ und $H_1 : \theta > \theta_0$ ausdehnen, falls die Verteilungsfamilie einen monotonen Dichtequotienten besitzt.

Asymptotisches Verhalten des Tests

In den meisten Fällen ist die exakte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese nicht bekannt. Man steht also vor dem Problem, dass kein kritischer Bereich zum vorgegebenen Niveau festgelegt werden kann. In diesen Fällen erweitert man die Klasse der zulässigen Tests auf solche, die asymptotisch das richtige Niveau besitzen. Formal bedeutet dies, dass man den Bereich K so wählt, dass für alle $\theta \in H_0$ die Bedingung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_\theta(T(X) \in K) \leq \alpha$$

erfüllt ist. In der Regel erhält man solche asymptotischen Tests via Normalapproximation, man versucht also, die Teststatistik so zu transformieren, dass sie gegen eine Normalverteilung konvergiert.

Einfache Beispiele hierfür sind der einfache und doppelte t-Test für Erwartungswerte. Hier folgt die asymptotische Verteilung direkt aus dem Zentralen Grenzwertsatz in der Anwendung auf das arithmetische Mittel. Daneben gibt es aber eine Reihe weiterer statistischer Methoden, die die Herleitung der asymptotischen Normalverteilung auch für kompliziertere Funktionale erlauben. Hierunter fällt die Deltamethode für nichtlineare, differenzierbare Transformationen asymptotisch normalverteilter Zufallsvariablen:

Sei $c : R^p \rightarrow R^q$ eine differenzierbare Funktion und sei ein Schätzer $\hat{\beta} \in R^p$ \sqrt{n} -normalverteilt mit Kovarianzmatrix V , dann hat $n^{0.5}(\hat{\beta} - \beta)$ folgende Verteilung: $N(0, (\partial c / \partial \beta)' V (\partial c / \partial \beta))$.

Ferner hat die nichtparametrische Deltamethode (auch: Einflussfunktionsmethode) einige Fortschritte gebracht:

Sei $T(F)$ ein Funktional, das von der Verteilung F abhängt. Sei $L(x) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} (T((1 - \delta)F + \delta G) - T(F)) / \delta$ die Gateux-Ableitung der Statistik bei F (Einflussfunktion) und sei T Hadamard-differenzierbar bezüglich $\sup_x |F(x) - G(x)|$, dann hat $\sqrt{n}(T(\hat{F}) - T(F))$ folgende Verteilung: $N\left(0, \int L(x)^2 dF(x)\right)$.

Die Deltamethode erlaubt Normalverteilungsapproximationen für nichtlineare, differenzierbare Transformationen (asymptotisch) normalverteilter Zufallsvariablen, während die Einflussfunktionsmethode solche Approximationen für viele interessante Charakteristika einer Verteilung zulässt. Darunter fallen u. a. die Momente (also etwa: Varianz,

Kurtosis usw.) aber auch Funktionen dieser Momente (etwa: Korrelationskoeffizient).

Eine wichtige weitere Anforderung an einen guten Test ist, dass er bei wachsendem Stichprobenumfang empfindlicher wird. In statistischen Termini bedeutet dies, dass bei Vorliegen einer konsistenten Teststatistik die Wahrscheinlichkeit dafür steigt, dass die Nullhypothese auch tatsächlich zu Gunsten der Alternative verworfen wird, falls sie nicht stimmt. Speziell wenn der Unterschied zwischen dem tatsächlichen Verhalten der Zufallsvariablen und der Hypothese sehr gering ist, wird er erst bei einem entsprechend großen Stichprobenumfang entdeckt. Ob diese Abweichungen jedoch von praktischer Bedeutung sind und überhaupt den Aufwand einer großen Stichprobe rechtfertigen, hängt von dem zu untersuchenden Aspekt ab.

Problem der Modellwahl

Die meisten mathematischen Resultate beruhen auf Annahmen, die bezüglich bestimmter Eigenschaften der beobachteten Zufallsvariablen gemacht werden. Je nach Situation werden verschiedene Teststatistiken gewählt, deren (asymptotische) Eigenschaften wesentlich von den Forderungen an die zu Grunde liegende Verteilungsfamilie abhängen. In der Regel müssen diese Modellannahmen zuvor empirisch überprüft werden, um überhaupt angewendet werden zu können. Kritisch ist dabei vor allem, dass die typischen Testverfahren strengen Voraussetzungen unterworfen sind, die in der Praxis selten erfüllt sind.

Parametrische und Nicht-parametrische Tests

Man unterscheidet **parametrische** und **nicht-parametrische (parameterfreie) Tests**

Parametrische Tests (parametrisches Prüfverfahren)

Bei Parametertests interessieren konkrete Werte wie Varianz oder Mittelwert. Ein parametrisches Prüfverfahren macht also Aussagen über Grundgesamtheitsparameter oder die in der Verteilungsfunktion einer Untersuchungsvariablen auftretenden Konstanten. Dazu müssen alle Parameter der Grundgesamtheit bekannt sein (was oft nicht gegeben ist). Bei einem Parametertest hat jede der denkbaren Stichproben die gleiche Realisationschance. Parametrische Tests gehen davon aus, dass die beobachteten Stichprobendaten einer Grundgesamtheit entstammen, in der die Variablen oder Merkmale ein bestimmtes Skalenniveau und eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung aufweisen, häufig Intervallskalenniveau und Normalverteilung. In diesen Fällen ist man also daran interessiert, Hypothesen über bestimmte Parameter der Verteilung zu testen.

Sofern die gemachten Verteilungsannahmen nicht stimmen, sind die Ergebnisse des Tests in den meisten Fällen unbrauchbar. Speziell lässt sich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art nicht mehr sinnvoll minimieren. Man spricht dann davon, dass für viele Alternativen die *power* sinkt!

Nicht-parametrische Tests

Bei parameterfreien Tests (auch nichtparametrische Tests oder Verteilungstests genannt) wird der *Typ der Zufallsverteilung* überprüft: Man entscheidet, ob eine aus n Beobachtungen oder Häufigkeitsverteilungen bestehende Nullhypothese, die man aus einer Zufallsstichprobe gezogen hat, mit einer Null-Hypothese vereinbar ist, die man über die Verteilung in der Grundgesamtheit aufgestellt hat. Nicht-parametrische Tests kommen also mit anderen Vorannahmen aus, die Menge der für Hypothese und Alternative zugelassenen Verteilungen lässt sich nicht durch einen Parameter beschreiben.

Typische Beispiele sind Tests auf eine bestimmte Verteilungsfunktion wie der Kolmogorow-Smirnow-Test oder der Wilcoxon-Test zum Vergleich der Mediane zweier Stichproben.

Da jedoch parametrische Tests trotz Verletzung ihrer Annahmen häufig eine bessere Power bieten als nicht-parametrische, kommen letztere eher selten zum Einsatz.

Wichtige Tests

- **Anpassungstest** oder **Verteilungstest**: Hier wird geprüft, ob vorliegende Daten einer bestimmten Verteilung entstammen. Anpassungstests prüfen Hypothesen über die Verteilung einer Zufallsvariablen etwa $H_0: F(x)=F_0(X)$, sie vergleichen beobachtete Verteilungen in einer Stichprobe mit einer erwarteten Verteilung. Der Anpassungstest prüft also, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit stammen kann, für die die erwartete Verteilung gilt. Die einfachste Form ist der Binominaltest.

Besondere Formen dieser Tests sind:

- **Multipler Test**: Verwendet man etwa anstelle eines H-Tests mit mehr als zwei unabhängigen Stichproben mehrere U-Tests als Einzeltests, so werden diese Einzeltests als multipler Test angesehen. Zu beachten ist hierbei besonders, dass bei den hintereinandergeschalteten Einzeltests sich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art mit der Anzahl des Tests vergrößert. Bei einem Vergleich muss dies unbedingt berücksichtigt werden.
- **Konservativer Test**: Bei einem konservativen Test ist die Prüfvariable diskret verteilt (etwa U-Test). Es gibt für ein vorgegebenes Signifikanzniveau keine Werte zum Beispiel für u , die die Gleichung $P(u \leq ur) = 5\%$ erfüllen, deshalb ersetzt man die Gleichung durch die Ungleichung $P(u \leq ur) \leq 5\%$. Man wählt also generell als Rückweisungspunkt jenen Wert, der zu einem Signifikanzniveau von höchstens 5% führt. Das vorgegebene Signifikanzniveau kann also praktisch erheblich unterschritten werden. Man verhält sich konservativ und begünstigt die Annahme der Nullhypothese.
- **Exakter Test**: Ein exakter Test ist ein Test, der für die zu testende Prüfvariable die exakt zuständige Stichprobenverteilung verwendet. Ein exakter Test approximiert also nicht. Exakte Test sind etwa der Fisher-Test, der Binomialtest, der McNemar-Test. Nicht exakt arbeitet zum Beispiel ein Test, bei dem man nach dem Zentralen Grenzwert-Theorem die Normalverteilung approximativ für eine Binomialverteilung verwendet.
- **Sequentieller Test**: Bei einem sequentiellen Test ist der Stichprobenumfang nicht vorgegeben. Vielmehr wird bei der laufenden Datenerfassung für jede neue Beobachtung ein Test durchgeführt, ob man aufgrund der bereits erhobenen Daten eine Entscheidung für oder gegen die Nullhypothese treffen kann (siehe Sequential Probability Ratio Test).

| Tests | Kurzbeschreibung |
|--|---|
| Verteilungsanpassungstests | |
| χ^2 -Anpassungstest | Test einer Stichprobe auf Zugehörigkeit zu einer Verteilung |
| Kolmogorow-Smirnow-Test | Test einer Stichprobe auf Zugehörigkeit zu einer Verteilung |
| Shapiro-Wilk-Test | Test einer Stichprobe auf Zugehörigkeit zur Normalverteilung |
| Parametrische Tests | |
| t-Tests (einfach, doppelt, doppelt mit gepaarten (=verbundenen, abhängigen) Stichproben) | Test auf Erwartungswert; Vergleich zweier Erwartungswerte; Test auf Korrelation; Signifikanztest von Regressionskoeffizienten |
| Korrelationstest (letztlich ein t-Test, s.o.) | Test auf linearen Zusammenhang zweier metrischer Variablen |
| F-Test | Vergleich zweier Varianzen; Modelltest der Regressionsanalyse |
| χ^2 -Test von Bartlett | Vergleich von mehr als zwei Varianzen |
| Levene-Test | Test auf Homogenität von Varianzen zwischen Gruppen |
| Verteilungsfreie (nichtparametrische) Tests | |
| χ^2 Unabhängigkeitstest | Prüfung der Unabhängigkeit zweier Merkmale |
| Test von Cochran/Cochrans Q | Test auf Gleichverteilung mehrerer verbundener dichotomer Variablen |
| Kendalls Konkordanzkoeffizient/Kendalls W | Test auf Korrelation von Rangreihen |

| | |
|-------------------------------|--|
| Wilcoxon-Rangsummentest | Test auf Gleichheit des Lageparameters, bei unbekannter aber identischer Verteilung im 2-Stichprobenfall mit ungepaarten Stichproben |
| Mann-Whitney-U-Test | äquivalent zum Wilcoxon-Rangsummentest |
| Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test | Test auf Gleichheit des Lageparameters, bei unbekannter aber identischer Verteilung im 2-Stichprobenfall mit gepaarten Stichproben |
| Kruskal-Wallis-Test | Test auf Gleichheit des Lageparameters, bei unbekannter aber identischer Verteilung im c-Stichprobenfall mit ungepaarten Stichproben |
| Friedman-Test | Test auf Gleichheit des Lageparameters, bei unbekannter aber identischer Verteilung im c-Stichprobenfall mit gepaarten Stichproben |
| Quade-Test | Test auf Gleichheit des Lageparameters, bei unbekannter aber identischer Verteilung im c-Stichprobenfall mit gepaarten Stichproben |
| Run(s)-Test | Prüfung einer Reihe von Werten (etwa Zeitreihe) auf Stationarität |
| Wald-Wolfowitz-Run(s)-Test | Test auf Gleichheit zweier kontinuierlicher Verteilungen |

Auswahl des Signifikanztestverfahrens

abhängig oder verbunden: Zwei Stichproben A und B hängen voneinander in Bezug auf Störgrößen und Einflussgrößen ab (etwa Vorher-Nachher-Vergleiche, Medikament A und B werden an je einem Patienten gleichzeitig gegeben ...)

| | | | | METRISCH | | | | |
|---|--|--------------|----------|------------------------------------|----------|---|--|---|
| NOMINAL | | ORDINAL | | nicht normalverteilt, aber ähnlich | | normalverteilt | | |
| unabhängig | abhängig | unabhängig | abhängig | unabhängig | abhängig | unabhängig | abhängig | |
| χ^2 für: k x 1 -Felder 2 x 2 Felder | χ^2 McNemar-Test für: 2 x 2 Felder | Mann-Whitney | Wilcoxon | Mann-Whitney | Wilcoxon | F-Test (Varianzquotiententest) entscheidet über: | | t-Test für verbundene Stichproben |
| | | | | | | Varianz-homogenität t-Test | Varianz-heterogenität Welch-Test | |
| nichtparametrische Testverfahren | | | | | | parametrische Testverfahren | | |

Literatur

- Joachim Hartung, Bärbel Elpelt, Karl-Heinz Klösener: *Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik* [mit zahlreichen durchgerechneten Beispielen], 15., überarbeitete und erweiterte Auflage. Oldenbourg, München 2005. ISBN 978-3-486-59028-9.
- Horst Rinne: *Taschenbuch der Statistik. 4., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage.* Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2008. ISBN 978-3-8171-1827-4.

Weblinks

- umfangreicher Entscheidungsbaum in Posterform ^[2] (PDF-Datei; 44 kB)
- Erklärung Hypothesentest/Signifikanztest/statistischer Test für Schüler ^[3]
- Statistical Tests Overview ^[4] (englisch)

Referenzen

- [1] Wir betrachten für p den Parameterbereich $[1/4, 1]$, um zu erreichen, dass Nullhypothese und Alternativhypothese den gesamten Parameterbereich überdecken. Bei absichtlichem Nennen einer falschen Farbe könnte man zwar auch auf Hellseh-Fähigkeiten schließen, aber wir nehmen an, dass die Testperson eine möglichst hohe Trefferzahl erzielen will.
- [2] <http://www.students.uni-marburg.de/~Cal/Zeug/Entscheidungsbaum.pdf>
- [3] <http://www.mathematik-wissen.de/hypothesentest.htm>
- [4] http://www.wiwi.uni-muenster.de/ioeb/en/organisation/pfaff/stat_overview_table.html
-

Quellen und Bearbeiter der Artikel

Spezifität *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=74233304> *Bearbeiter:* AndreasE, Arno Matthias, Beyer, JakobVoss, James hetfield, Knoerz, Nerd, R.K.A.L., Sigbert, Zefram, 8 anonyme Bearbeitungen

Richtig negativ *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=56446619> *Bearbeiter:* AchimK, AndreasE, Exil, Holleser, STBR, 1 anonyme Bearbeitungen

Sensitivität *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=74133876> *Bearbeiter:* AndreasE, Docvalium, Flominator, JakobVoss, James hetfield, MBq, Nameless23, Nerd, Psychologe, R.K.A.L., Sigbert, Srbauer, Turbo-pascl, Wickey, Zefram, 7 anonyme Bearbeitungen

Falsch negativ *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64319442> *Bearbeiter:* AndreasE, Birger Fricke, ChristianBier, ChristophDemmer, Church of emacs, DerHorst, Heinte, JakobVoss, Jodoform, Klara Rosa, Maikel, Michael Gäbler, Purodha, Schwarzvogel, Stauba, 6 anonyme Bearbeitungen

Statistischer Test *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=74404019> *Bearbeiter:* Aka, Alauda, Alfred Grudszus, AndreasE, Arved, Avatar, Beben, Birger Fricke, Brainswiffer, Capullo, Chrisfrenzel, Chrisqwq, Christian1985, Computator, Derjeniger, welcher, Dfritz, Don Magnifico, DrKoch, Eisenberg, Ephraim33, ErikDunsing, Erika39, Erzbischof, Exil, Faber-Castell, Falk Lieder, Franzki, Fuzzy, Gancho, Goldfisch, Hao Xi, Hermannthomas, Hieke, Hob Gadling, Hokra, Hve, Jackalope, JakobVoss, Kku, Knollebuur, KurtSchwitters, KurtWatzka, MH, Marcu, MartinThoma, MaxPower, Nerd, Nijdam, Omega prime, Oschoett, PAB, Peppí, Peter200, Philipendula, Plehn, Prabodh, Praktisch, Rb, Rdb, S1, STBR, Saippukauppias, Saperaud, Scherben, Schlurcher, Sigbert, Silberchen, Stern, Texec, Thire, Tomi, Tomukas, Tönjes, UW, YMS, , 86 anonyme Bearbeitungen

Quellen, Lizenzen und Autoren der Bilder

File:Einseitiger Signifikanztest.svg *Quelle:* http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Einseitiger_Signifikanztest.svg *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:MartinThoma

Lizenz

Wichtiger Hinweis zu den Lizenzen

Die nachfolgenden Lizenzen beziehen sich auf den Artikeltext. Im Artikel gezeigte Bilder und Grafiken können unter einer anderen Lizenz stehen sowie von Autoren erstellt worden sein, die nicht in der Autorenlister erscheinen. Durch eine noch vorhandene technische Einschränkung werden die Lizenzinformationen für Bilder und Grafiken daher nicht angezeigt. An der Behebung dieser Einschränkung wird gearbeitet. Das PDF ist daher nur für den privaten Gebrauch bestimmt. Eine Weiterverbreitung kann eine Urheberrechtsverletzung bedeuten.

Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported - Deed

Diese "Commons Deed" ist lediglich eine vereinfachte Zusammenfassung des rechtsverbindlichen Lizenzvertrages (http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported) in allgemeinverständlicher Sprache.

Sie dürfen:

- das Werk bzw. den Inhalt **vervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen**
- Abwandlungen und Bearbeitungen** des Werkes bzw. Inhaltes anfertigen

Zu den folgenden Bedingungen:

- Namensnennung** — Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen.
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen** — Wenn Sie das lizenzierte Werk bzw. den lizenzierten Inhalt bearbeiten, abwandeln oder in anderer Weise erkennbar als Grundlage für eigenes Schaffen verwenden, dürfen Sie die daraufhin neu entstandenen Werke bzw. Inhalte nur unter Verwendung von Lizenzbedingungen weitergeben, die mit denen dieses Lizenzvertrages identisch, vergleichbar oder kompatibel sind.

Wobei gilt:

- Verzichtserklärung** — Jede der vorgenannten Bedingungen kann aufgehoben werden, sofern Sie die ausdrückliche Einwilligung des Rechteinhabers dazu erhalten.
- Sonstige Rechte** — Die Lizenz hat keinerlei Einfluss auf die folgenden Rechte:

- Die gesetzlichen Schranken des Urheberrechts und sonstigen Befugnisse zur privaten Nutzung;
- Das Urheberpersönlichkeitsrecht des Rechteinhabers;
- Rechte anderer Personen, entweder am Lizenzgegenstand selber oder bezüglich seiner Verwendung, zum Beispiel Persönlichkeitsrechte abgebildeter Personen.

- Hinweis** — Im Falle einer Verbreitung müssen Sie anderen alle Lizenzbedingungen mitteilen, die für dieses Werk gelten. Am einfachsten ist es, an entsprechender Stelle einen Link auf <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.de> einzubinden.

Haftungsbeschränkung

Die „Commons Deed“ ist kein Lizenzvertrag. Sie ist lediglich ein Referenztext, der den zugrundeliegenden Lizenzvertrag übersichtlich und in allgemeinverständlicher Sprache aber auch stark vereinfacht wiedergibt. Die Deed selbst entfaltet keine juristische Wirkung und erscheint im eigentlichen Lizenzvertrag nicht.

GNU Free Documentation License

Version 1.2, November 2002

Copyright (C) 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.

51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies

of this license document, but changing it is not allowed.

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It implements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable Transparent formats include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ, in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History.") To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties; any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest on adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing modification and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- Preserve all the copyright notices of the Document.
- Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- Include an unaltered copy of this License.
- Preserve the section Entitled "History". Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions if it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words to a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need not contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects. You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document

under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2

or any later version published by the Free Software Foundation;

with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.

A copy of the license is included in the section entitled

"GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the

Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.